ζ · Math 数学分析 1 期中试题

命题: 宗语轩[1]

2021.9.30

注: 本卷满分 100 分 (其中附加题 15 分, 全卷得分不超过 100 分), 建议用时 2 小时.

一. (17 分, 第 1 题 10 分, 第 2 题 7 分) 证明题:

1. 用函数极限的定义证明:$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x+2}=1$.

2. 用 Lagrange 中值定理证明 Gibbs 不等式: 当 $x,y>0$ 时, 有 $x-x\ln x\leqslant y-x\ln y$.

二. (24 分, 第 1 题 10 分, 第 2,3 题各 7 分) 计算题:

1. 设函数 $y=y(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足方程 $y=\sin(x+y)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$(用含 y 的代数式表示).

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{2021n}\dfrac{1}{n+k+(-1)^k\sqrt{k}}$.

三. (28 分, 第 1,2 题各 6 分, 第 3,4 题各 8 分) 设 α 是实数, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\ln x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -f(-x), & x<0.\end{cases}$

1. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 求 α 的取值范围.

2. 若 $\alpha=-1$, 求 $f^{(n)}(1)(n\in\mathbb{N}^*)$.

3. 若 $\alpha=\dfrac{1}{2}$, 证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

4. 若 $\alpha=1$, 证明: 不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $g(x)$, 满足 $g(g(x))+f(x)=0$.

四. (15 分, 第 1 题 5 分, 第 2 题 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=2021$.

1. 若 $a_n>0$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛. 并求其极限.

2. 若 $a_{n+1}a_n<0$,

(2a) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 发散;

(2b) 证明: 数列 $\{|a_n|\}$ 收敛. 并求其极限.

---

[1]就读于中国科学技术大学 2019 级数学科学学院概率统计系.
个人主页:http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/index.html

五. (16 分, 第 1 题 10 分, 第 2 题 6 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

(1a) 举出一个 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ 不成立的例子, 并说明理由;

(1b) 若 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 一致连续, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

2. 设 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上 4 阶可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(4)}(x)$ 都存在, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0$,$k=1,2,3$.

附加题. (15 分, 第 1 题 5 分, 第 2 题 10 分) 我们进行如下过程: 对正数 a, 选取小于 a 的最大自然数 k_0, 令 $a=k_0+r_0$, 其中 $0\leqslant r_0<1$. 若 $r_0=0$, 则该过程终止; 若 $r_0>0$, 则选取小于 a 的最大自然数 k_1, 令 $\dfrac{1}{r_0}=k_1+r_1$, 其中 $0\leqslant r_1<1$. 若 $r_1=0$, 则该过程终止；若 $r_1>0$, 则选取小于 a 的最大自然数 k_2, 令 $\dfrac{1}{r_1}=k_2+r_2$, 其中 $0\leqslant r_2<1$. 以此类推下去, 我们得到连分数的定义, 其展开式记作：

$$a=k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3+\cfrac{1}{\cdots}}}}.$$

例如,π 的连分数展开式是：

$$\pi=3.14159265\cdots=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}.$$

1. 直接写出 3.245 和 $\dfrac{37}{97}$ 的连分数展开式, 并证明: 正数 a 是有理数的充要条件是存在自然数 m, 使得 $r_m=0$. 此时

$$a=k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{k_m}}}}$$

被称为有限连分数.

2. 若正数 a 是无理数. 记 $k_0 = \dfrac{p_0}{q_0}$， $k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{k_n}}}} = \dfrac{p_n}{q_n}$， $(p_n, q_n) = 1$.

(2a) 若对任意自然数 n, 均有 $k_n = 1$, 直接写出 a 的值（化简后的分式）;

(2b) 直接写出 $\sqrt{2}$ 的连分数展开式;

(2c) 证明: 对任意正整数 n, 均有 $q_n \geqslant n - 1$;

(2d) 证明: 对任意自然数 n, 均有 $\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} < \dfrac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < a < \dfrac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}} < \dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$;

(2e) 证明: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = a$.

3.(思考题, 不作为考试) 设 n 是无平方因子的正整数, 证明：$\sqrt{n}$ 的连分数展开式中数列 $\{k_n\}$ 从某项开始是周期数列.

国庆节快乐！